

Государственное профессиональное образовательное учреждение
«Кузбасский многопрофильный техникум»

**Методическая разработка урока по учебной дисциплине «Математика»
по теме «Тригонометрические функции»**

Разработал:
преподаватель математики
ГПОУ КМТ
Пашковская Л.Н.

Белово, 2023

Цели урока:

- *Образовательные:* введение понятий тригонометрических функций синуса, косинуса, тангенса и котангенса как координат точки единичной окружности; определение множества значений этих функций; рассмотрение перевода градусной меры измерения углов в радианную меру и наоборот; формирование умения определять знаки тригонометрических функций, зависимость между косинусом, синусом, тангенсом и котангенсом одного и того же аргумента; умение находить значения тригонометрических функций по тригонометрической окружности; выполнение действия с тригонометрическими функциями.
- *Развивающие:* развитие и совершенствование умения применять имеющиеся знания в различных ситуациях; развитие грамотной математической речи учащихся, умение давать лаконичные формулировки.
- *Воспитательные:* воспитание у учащихся аккуратности, умения слушать, высказывать свое мнение; культуру поведения.

Тип урока: комбинированный.

Форма работы: фронтальная и индивидуальная

Методы обучения: диалогическое изложение материала с использованием ИКТ

Оборудование: компьютер, мультимедийный проектор, раздаточный материал, презентация к уроку.

Ход урока

I. Организационный момент (2 мин)

Проверка готовности группы и кабинета к уроку. Настройка обучающихся на тему урока.

Открываем тетради. Записываем сегодняшнее число и тему нашего урока: «Тригонометрические функции».

Все новое и необычное всегда привлекает к себе. А люди, пусть даже неосознанно, стремятся это узнать. Таджикский поэт Рудаки так говорил об этом:

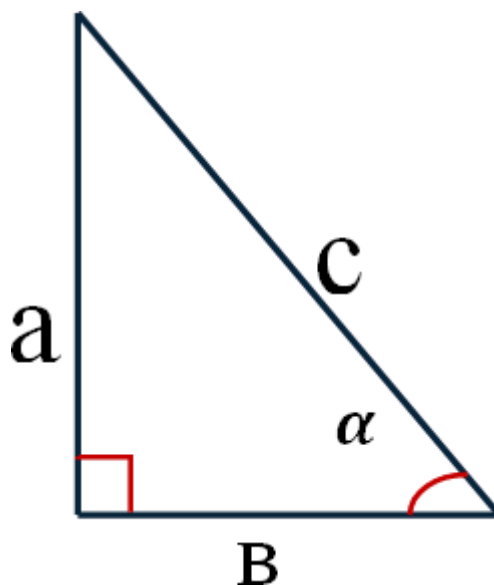
С тех пор как существует мирозданье,
Такого нет, кто б ни нуждался в знанье.
Какой мы ни возьмем язык и век,
Всегда стремится к знанью человек!

Сегодня мы начинаем изучать тригонометрию. Тригонометрия – это греческое слово и в переводе означает «измерение треугольников». Возникновение тригонометрии было связано с землей измерением, астрономией, строительным делом. Выходит, что знание и понимание этой темы важно не только для будущей сдачи экзамена по математике, но для освоения и выбранной вами профессии.

II. Актуализация знаний (3 мин)

С этим разделом математики вас познакомили учителя в школе на уроках геометрии при изучении отношений между сторонами и углами в прямоугольном треугольнике.

Давайте вспомним: какие понятия связывают стороны и острые углы прямоугольного треугольника?



$$\sin \alpha = \frac{\text{противолежащий катет}}{\text{гипотенуза}} = \frac{a}{c}$$

$$\cos \alpha = \frac{\text{прилежащий катет}}{\text{гипотенуза}} = \frac{b}{c}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\text{противолежащий катет}}{\text{прилежащий катет}} = \frac{a}{b}$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\text{прилежащий катет}}{\text{противолежащий катет}} = \frac{b}{a}$$

Итак, синус, косинус, тангенс и котангенс – это некоторые числа. Причем для каждого угла свои и их значение зависит только от величины угла.

Также вам уже известно, что синус, косинус, тангенс и котангенс называют тригонометрическими функциями, и мы можем их найти по величине угла или наоборот найти величину угла, если нам известно значение одной из этих функций. Для этого

существуют специальные таблицы Брадиса. Правда, в настоящее время мы обращаемся к ним редко, а скажите почему?

Понятие синуса угла, как отношение отрезков треугольника появилось уже 3 веке до нашей эры в работах математиков Древней Греции – Евклида, Архимеда, Апполония Пергского. В 1 веке нашей эры оно исследовалось Минелам, но еще не получило своего сегодняшнего названия. В 4-5 веках индийский ученый Ариабхата ввел специальный термин джива – «тетива», который при переводе арабских текстов на латынь был заменен синусом, что означает изгиб, кривизна.

Слово косинус намного моложе. Косинус – это сокращение латинского выражения, которое означает «дополнительный синус».

Абу-Абдалах, арабский астроном и математик 10 века, наблюдая за солнечными часами, создал первые таблицы таких тригонометрических функций, как тангенс и котангенс, не вводя эти понятия. Сам термин, в переводе с латинского означающий «отрезок касательной» был введен только в 1583 году датским математиком Томасом Финком.

III. Изучение нового материала (25 мин)

Сегодня на уроке мы продолжим изучать эти тригонометрические функции, а также познакомимся с тригонометрической окружностью, рассмотрим понятие этих функций с помощью окружности, научимся находить по ней значения функций, их знаки, вспомним основные тригонометрические тождества и разберем, как их применять для решения задач.

Рассмотрим окружность единичного радиуса, центр которой совпадает с началом прямоугольной системы координат. Это означает, что у нас есть знакомые нам ось абсцисс (ось x) и ось ординат (ось y). Центр окружности мы совместили с началом координат. Наша окружность единичная, то есть радиус у нее равен 1. Значит, координаты точек пересечения с окружностью будут равны 1 и -1 на каждой оси. Возьмем точку с координатами (1;0), которая будет двигаться по нашей окружности, обозначим ее M_0 . За положительное направление выбирают движение против часовой стрелки, за отрицательное движение по часовой стрелке. Начальное положение, которое занимает наша точка, примем за начало отсчета пути, пройденного точкой по окружности. Пусть точка двигается против часовой стрелки, то есть в положительном направлении. При движении по окружности она займет положение точки M , которая будет иметь координаты $(x; y)$, так как точка расположена в координатной плоскости. Проведем к этой точке радиус и угол между этой точкой M и радиусом обозначим α . Значит, положение точки M мы можем задать двумя способами: с одной стороны координатами $(x; y)$, так как точка лежит в координатной плоскости и с другой стороны, с помощью угла поворота этой точки вокруг начала координат. И если мы можем положение точки задать двумя способами, значит между ними, должна быть какая-то связь. То есть координаты точки $(x; y)$ и величина угла должны быть связаны некоторой функцией. Таким образом, у нас появляются тригонометрические функции, которые выражают зависимость между координатами точки единичной окружности в системе координат и углом поворота, при помощи которого мы попадаем из нашей начальной точки M_0 при движении, в точку M . Выразим эту зависимость, определяя, координаты точки M . Опускаем перпендикуляры на координатные оси. Получаем прямоугольный треугольник.

Применим уже известные нам отношения между сторонами и углами прямоугольного треугольника и получим, что координата x (абсцисса) точки M будет равна:

$$\cos \alpha = \frac{OA}{OM} = OA = x, \quad x = \cos \alpha.$$

Так как у нас единичная окружность, то $OM=1$. Ордината

$$\text{у точки } M \text{ находится аналогично и будет равна: } \sin \alpha = \frac{MA}{OM} = \frac{OB}{OM} = OB = y, \quad y = \sin \alpha.$$

$\left. \begin{array}{l} x = \cos \alpha \\ y = \sin \alpha \end{array} \right\}$ – координаты точки на единичной окружности.

Для функций тангенс и котангенс получаем следующие равенства из того же прямоугольного треугольника: $tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ и $ctg\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$.

Итак, косинусом угла α называется абсцисса (то есть координата по оси OX) точки на единичной окружности, соответствующей данному углу α .

Синусом угла α называется ордината (то есть координата по оси OY) точки на единичной окружности, соответствующей данному углу α .

Получаем, что ось x – это ось косинуса, ось y – это ось тангенса. Функции тангенс и котангенс также имеют свои оси. Осью тангенсов является касательная к единичной окружности в точке с координатой (1; 0), а осью котангенсов - касательная к окружности в точке с координатой (0; 1). Значит значения этих функций находят по данным осям.

Так как синус и косинус это по сути координаты точки на единичной окружности и из ее рассмотрения видно, что они лежат в пределах от -1 до 1, то можем сделать вывод о том, какие значения могут принимать наши

функции: $-1 \leq \sin\alpha \leq 1, -1 \leq \cos\alpha \leq 1, -\infty \leq tg\alpha \leq +\infty$ и $-\infty \leq ctg\alpha \leq +\infty$.

Зная это, мы можем ответить на вопрос: может

ли $\sin\alpha = 1,2$ ($\cos\alpha = -0,7, tg\alpha = 3,3, ctg\alpha = -0,2$).

Значение угла α может быть любым: от минус бесконечности до плюс бесконечности.

Обратимся к нашему треугольнику и вспомним теорему Пифагора. Радиус единичной окружности - это гипотенуза треугольника, а ее катеты равны соответственно $\cos\alpha$ и $\sin\alpha$. Тогда применяя теорему Пифагора (квадрат гипотенузы прямоугольного треугольника равен сумме квадратов ее катетов) получаем равенство, называемое основным тригонометрическим тождеством: $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$.

А сейчас давайте разберемся, как нам определять знаки тригонометрических функций. Это не сложно. Знаки тригонометрических функций соответствуют знакам координат точки единичной окружности. Координатные оси разбивают всю координатную плоскость и окружность на четыре координатные четверти. Нумерация четвертей совпадает с началом движения точки M_0 по окружности в положительном направлении, то есть против часовой стрелки. (далее указываем по рисунку номера четвертей). Границы наших четвертей: от точки M_0 – это 0° до 90° , от 90° до 180° , от 180° до 270° , от 270° до 360° .

Определим знаки тригонометрических функций в каждой четверти. Для этого заполним таблицу:

	I	II	III	IV
$\sin\alpha$	+	+	-	-
$\cos\alpha$	+	-	-	+
$tg\alpha$	+	-	+	-
$ctg\alpha$	+	-	+	-

Вы уже знаете, что величины углов могут измеряться в радианной мере и градусной мере. А это означает, что вы должны уметь переходить от радианной меры измерения угла к градусной.

Угол в 1 радиан это центральный угол, который опирается на дугу, равную радиусу. Длина окружности равна: $c = 2\pi R$. То есть в нашей окружности помещается ровно два пи дуг, длина которых равна радиусу и значит, во всей нашей окружности помещается два пи углов в один радиан. Вся окружность равна 360° . Значит, 360° соответствует 2π радианам, а 180° соответствует π радиан.

При переходе от радианной меры к градусной и наоборот проще всего использовать это соотношение: $\pi = 180^\circ$.

Выразить радианы в градусах несложно, достаточно вместо π подставить 180° и вычислить. Например:

$$\frac{\pi}{4} = \frac{180^\circ}{4} = 45^\circ \text{ или } \frac{4\pi}{9} = \frac{4 \cdot 180^\circ}{9} = 80^\circ.$$

В случае, когда надо перейти от градусной меры в радианную можно применять формулу: $x = \frac{180^\circ \cdot \pi}{\alpha^\circ}$, где α° – это величина угла в градусах. Но формулы имеют свойство забываться, поэтому я предлагаю вам при необходимости составлять пропорцию. Например, выразим 30° в радианах:

30° – x рад, откуда $x = \frac{30^\circ \cdot \pi}{180^\circ} = \frac{\pi}{6}$.

180° – π рад, откуда $x = \frac{30^\circ \cdot \pi}{180^\circ} = \frac{\pi}{6}$.

100° – x рад, откуда $x = \frac{100^\circ \cdot \pi}{180^\circ} = \frac{5\pi}{9}$.

Наиболее часто употребляемыми углами являются углы

в $30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 90^\circ, 180^\circ, 270^\circ, 360^\circ$. Давайте переведем их в радианы и запишем на нашей окружности. Углы в $30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$ находятся в первой четверти и составляют от него третью часть, половину и две третьих.

Так как значение $\pi \approx 3,14$, значит $\pi > 3$, значит $\frac{\pi}{3} > 1$, следовательно, на окружности точка 1 расположена выше $\frac{\pi}{3}$. Значение $90^\circ = \frac{\pi}{2} \approx 1,57$, $180^\circ = \pi \approx 3,14$, $270^\circ = \frac{3\pi}{2} \approx 4,7$, $360^\circ = 2\pi \approx 6,28$.

Значит, если мы хотим найти угол в 2 радиана, то видим, что он лежит между значениями 1,57 и 3,14, то есть во II четверти. Не забывайте, что угол мы отмечаем от положительного направления оси ОХ. Соответственно угол в -1 радиан лежит в IV четверти. Также мы определяем, где лежит угол в $200^\circ, -80^\circ$. Для определения четверти для углов, равных $\frac{\pi}{8}$ или $\frac{5\pi}{3}$ мы должны определить, какая из них правильная дробь, а какая неправильная дробь. Правильную дробь $\frac{\pi}{8}$ сравнить со значением $\frac{\pi}{2}$ и если она больше ее, то угол лежит во второй четверти (или наоборот), а неправильную дробь $\frac{5\pi}{3}$ со значением $\frac{3\pi}{2}$ и если она меньше его, то угол лежит в третьей четверти. В итоге получаем, что $\frac{\pi}{8} < \frac{\pi}{2}$, а $\frac{5\pi}{3} > \frac{3\pi}{2}$.

Мы с вами выяснили, что ее еще называют тригонометрической, так как координатами точки на окружности являются функции синус, косинус, тангенс и котангенс. Определили, что синус и косинус могут принимать значения только от -1 до 1, а тангенс и котангенс от – бесконечности до + бесконечности. Рассмотрели координатные четверти, их границы, как найти в какой четверти лежит угол, разобрали, как связаны между собой радианы и градусы. При этом наша тригонометрическая окружность изменялась, обрастала все новыми значениями. Если бы мы продолжили работу по нахождению значений координат точки и углов, соответствующих координатам по нашей окружности, то она бы приняла вот такой вид. (Идет демонстрация слайда с единичной окружностью и говорится, что такие же окружности есть у вас на столах, для удобства в работе).

Разберем, как работать с этой окружностью. Нахождение значений угла или функции напоминает нахождение координаты точки по графику или определение положения точки по заданным координатам.

Например, найдем, чему будут равны:

$\cos 60^\circ, \operatorname{tg} 45^\circ, \operatorname{ctg} 60^\circ, \sin \frac{4\pi}{3}, \operatorname{ctg} \frac{\pi}{4}$. При помощи круга мы можем находить значения углов не только до 360° , но и больших, так движение по кругу напоминает движение по спирали: один оборот, второй оборот и так далее. Например, найдем, чему равны значения функций: $\sin 420^\circ, \cos 510^\circ$.

Вы должны находить значение тригонометрических функций по известному значению одной из них. Например, найти чему будет равен косинус, тангенс или котангенс какого-то угла, если синус этого же угла принимает такое-то значение. Для этого надо знать формулы, которые связывают известную и неизвестную величины. В тригонометрии их называют тригонометрические тождества.

Вот основные из них: это основное тригонометрическое тождество, мы его с вами вывели ранее $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$ вместе с вот этими формулами: $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$. А вот эти три тождества вытекают из предыдущих:

$$\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1$$

$$1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

$$1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$$

IV. Закрепление материала (

1. Устная работа (повторение теории). Вопросы для обучающихся (5 мин)

- Какие тригонометрические функции мы рассматривали?
- Как определяют функцию синус, косинус, тангенс, котангенс?
- На какой оси находятся значения синуса, косинуса, тангенса котангенса?
- В каких пределах может изменяться значение синуса, косинуса, тангенса и котангенса?
- В какой четверти косинус больше 0, синус отрицателен, тангенс положителен, а котангенс меньше нуля?
- Что необходимо знать, чтобы определить знак функции?
- Какое направление считается положительным, а какое отрицательным?
- В каких единицах может выражаться угол?
- Как выполнить переход от радианной меры к градусной и наоборот?

2. Устная работа (решение упражнений). Задания для устной работы (5 мин)

- Верно ли равенство: $\cos \alpha = 1,5$ $\operatorname{tg} \alpha = 5$ $\sin \alpha = \pi$ $\operatorname{ctg} \alpha = -\sqrt{6}$ $\sin \alpha = \frac{\pi}{7}$?
- Определите знак функции: $\cos 134^\circ$ $\operatorname{tg} 250^\circ$ $\operatorname{ctg} 74^\circ$ $\sin \frac{\pi}{6}$?
- Переведите радианную меру угла в градусную: $\frac{\pi}{2}$ $\frac{\pi}{3}$ $\frac{\pi}{4}$ $\frac{\pi}{6}$.
- Найдите при помощи круга значение функций, объясните ответ:
 $\sin \frac{5\pi}{6}$ $\cos \frac{4\pi}{3}$ $\operatorname{tg} 45^\circ$ $\sin 180^\circ$ $\cos 270^\circ$ $\operatorname{ctg} \frac{\pi}{3}$.
- Найдите при помощи круга значение синуса, косинуса, тангенса, если величина угла равна: $\frac{\sqrt{3}}{2}$, $-\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\frac{1}{2}$.

После окончания устной работы, отметить активных учащихся, поставить оценки за первый урок.

3. Решение упражнений, работа по учебнику (20 мин)

1 задание: №3 (а и в) из учебника «Алгебра 10-11» Колмогорова.

а) $\sin 0^\circ + \cos \frac{\pi}{2} + \sin^2 \frac{\pi}{4} = 1 + 0 + \left(\frac{\pi}{4}\right)^2 = \frac{1}{2}$

б) $3 \cdot \sin \frac{\pi}{6} + 2 \cdot \cos \pi + \operatorname{ctg}^2 \frac{\pi}{6} = 3 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot (-1) + (\sqrt{3})^2 = \frac{3}{2} - 2 + 3 = 2,5$

2 задание: текст задания дан на слайде презентации: найдите знак произведения:

а) $\cos 130^\circ \cdot \operatorname{tg} 220^\circ < 0$

- б) $\sin 205^\circ \cdot \cos 305^\circ < 0$
 в) $\cos 320^\circ \cdot \operatorname{tg} 130^\circ \cdot \operatorname{ctg} 125^\circ > 0$
 г) $\operatorname{tg} 1.4 \cdot \operatorname{ctg}(-1.2) \cdot \sin(-2.1) > 0$

3 задание: № 7 (а) по учебнику.

$$\sin \alpha = -0.8 \quad \pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$$

Найдите: $\cos \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha$, $\operatorname{ctg} \alpha$.

Решение.

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha$$

$$\cos^2 \alpha = 1 - (-0.8)^2 = 1 - 0.64 = 0.36$$

$$\cos \alpha = \pm \sqrt{0.36} = \pm 0.6$$

Так угол лежит в 3 четверти, то

$$\cos \alpha = -0.6$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{-0.8}{-0.6} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{3}{4}$$

Ответ: -0.6 ; $\frac{4}{3}$; $\frac{3}{4}$.

4. Самостоятельная работа (15 мин.)

После решения работа первый раз проверяется учащимися в виде взаимопроверки, выставляются следующие оценки: за 3 задания – «3», за 4 задания – «4», за все 5 заданий оценка 5.

Задания для самостоятельной работы.

I вариант.

1. Выразите в градусной мере величину угла: $\frac{3\pi}{5}$.
2. Выразите величину угла в радианах: 15° .
3. Найдите знак произведения, используя правило знаков по четвертям: $\sin 65^\circ \cdot \cos 100^\circ \cdot \operatorname{tg} 40^\circ$.
4. Вычислите значение выражения: $\sin \frac{\pi}{6} + \sqrt{3} \cdot \cos \frac{\pi}{6}$.
5. Найдите значение функции $\cos \alpha$, если $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ и $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

II вариант.

1. Выразите в градусной мере величину угла: $\frac{2\pi}{3}$.
2. Выразите величину угла в радианах: 36° .
3. Найдите знак произведения, используя правило знаков по четвертям: $\sin 140^\circ \cdot \cos 35^\circ \cdot \operatorname{tg} 150^\circ$.
4. Вычислите значение выражения: $\sin \frac{\pi}{6} + \sqrt{3} \cdot \cos \frac{\pi}{6}$.
5. Найдите значение функции $\sin \alpha$, если $\cos \alpha = \frac{3}{5}$ и $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$.

V. Разбор домашнего задания (2 мин.)

Задание на дом вывести на слайд презентации: по учебнику № 31 (а и в), № 15 (г), № 3 (в и г).

VI. Рефлексия (3 мин.)

Подведение итогов урока, проведя беседу с обучающимися по вопросам: что узнали, что решали? было интересно...

было трудно...
я научился...
я приобрел...
я попробую...
урок дал мне для жизни...
мне захотелось...